数理解析研究所講究録 1415 巻 2005 年 168-175

三角型ノルムを用いたファジィ配置問題について: Part I

弘前大学 理工学部　　金 正道 (Masamichi KON)
Faculty of Science and Technology, Hirosaki University

概要 ファジィ max-T 型配置問題を考える。ファジィ max-T 型配置問題は、目的関数に minimum 演算で定義される三角型ノルムの代わりに任意の三角型ノルムを用いることによって、ファジィ maximin 型配置問題を一般化した問題である。そして、ファジィ max-T 型配置問題の最適解が存在するための条件およびファジィ max-T 型配置問題の最適解とファジィ多目的配置問題の有効解の間の関係を与える。さらに、ファジィ max-T 型配置問題の最適解を求めるための手続きを与える。

1. 準備 連続型配置モデルは、一般に需要点とよばれる $\mathbb{R}^n$ の点の有限集合が与えられていると仮定される。需要点は既存の施設または顧客の位置をモデル化したものである。$\boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \cdots, \ell(\geq 2)$ を需要点とし、$I \equiv \{1, 2, \cdots, \ell\}$ とする。このとき、新たに単一の施設を $\mathbb{R}^n$ に配置する問題は、単一施設配置問題とよばれる。各需要点から施設までの距離が小さいほど望ましいならば、それは各需要点から施設までの距離を含む関数の最小化問題として次のように定式化される。

$$(1)\qquad \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\gamma_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_1), \gamma_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_2), \cdots, \gamma_\ell(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_\ell))$$

ここで、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は施設の位置を表す変数である。f は通常 $\mathbb{R}^\ell$ から $\mathbb{R}$ への非減少凸関数または任意の $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^\ell$ に対して $f(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}$ となるような $\mathbb{R}^\ell$ から $\mathbb{R}^\ell$ への関数と仮定される。各 $i \in I$ に対して、γ_i: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は通常ノルムやゲージと仮定され、$\gamma_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_i)$ は $\boldsymbol{d}_i$ から $\boldsymbol{x}$ までの距離を表す。以下、各 $i \in I$ に対して、B_i は原点をその内部に含む $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合とし、γ_i は単位球 B_i をもつゲージとする。

B は原点をその内部に含む $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合とする。B に対する**ゲージ (gauge)** $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\gamma(\boldsymbol{x}) \equiv \inf\{\lambda > 0 : \boldsymbol{x} \in \lambda B\}$ と定義される。B はゲージ γ の**単位球 (unit ball)** とよばれ、ゲージ γ は単位球 B をもつゲージともよばれる。ゲージに関する詳細は [3,10] 参照。

各需要点から施設までの距離が小さいほど望ましい場合は、(1) の定式化は自然である。施設のある位置に対して、ある 2 つの需要点から施設までの距離が等しいとしても、それぞれの需要点に関する満足度は異なるかもしれない。また、配置する施設が飛行場ならば、飛行場が需要点に近すぎると騒音のため望ましくないだろう。このような状況も考慮するために、需要点に関する施設の位置に対する満足度を表すメンバーシップ関数を与え、目的関数にメンバーシップ関数を含む最大化問題を考える。メンバーシップ関数 μ_i: $\mathbb{R} \to [0,1] \equiv \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\}$, $i \in I$ が与えられていると仮定する。各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と $i \in I$ に対して、$\mu_i(\gamma_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_i))$ は需要点 $\boldsymbol{d}_i$ に関する施設の位置 $\boldsymbol{x}$ に対する満足

度を表す。便宜上、$x < 0$ に対して $\mu_i(x) = 0, i \in I$ と仮定する。各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\overline{\mu}_i(\boldsymbol{x}) \equiv \mu_i(\gamma_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i)), i \in I$ とする。各 $i \in I$ に対して、A_i をメンバーシップ関数 μ_i をもつ $\mathbb{R}$ 上のファジィ集合とし、$\overline{A}_i$ をメンバーシップ関数 $\overline{\mu}_i$ をもつ $\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合とする。このとき、各 $i \in I$ に対して、A_i は需要点 $\boldsymbol{d}_i$ に関する施設までの望ましい距離を表すと解釈されるファジィ集合であり、$\overline{A}_i$ は需要点 $\boldsymbol{d}_i$ に関する施設の望ましい位置を表すと解釈されるファジィ集合である。**ファジィ多目的配置問題 (fuzzy multicriteria location problem, FMCP)** は次のように定式化される。

(2) $$\max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \boldsymbol{\mu}_{\text{FMCP}}(\boldsymbol{x}) \equiv (\mu_1(\gamma_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1)), \mu_2(\gamma_2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_2)), \cdots, \mu_\ell(\gamma_\ell(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_\ell)))^T$$

例えば、FMCP は [6] において扱われている。各 $\boldsymbol{z} \equiv (z_1, z_2, \cdots, z_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ に対して $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{z}) \equiv (\mu_1(z_1), \mu_2(z_2), \cdots, \mu_\ell(z_\ell))^T$ と定義し、各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}) \equiv (\gamma_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1), \gamma_2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_2), \cdots, \gamma_\ell(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_\ell))^T$ と定義する。このとき、$\boldsymbol{\mu}_{\text{FMCP}}$ は $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\gamma}$ の合成関数として $\boldsymbol{\mu}_{\text{FMCP}} = \boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\gamma}$ と表せる。点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ は $\boldsymbol{\mu}_{\text{FMCP}}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{\mu}_{\text{FMCP}}(\boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{\mu}_{\text{FMCP}}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{\mu}_{\text{FMCP}}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在しないとき FMCP の**有効解 (efficient solution)** とよばれる。FMCP のすべての有効解の集合を F_{E} とする。**ファジィ maximin 型配置問題 (fuzzy maximin location problem, FMMP)** は次のように定式化される。

(3) $$\max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \mu_{\text{FMMP}}(\boldsymbol{x}) \equiv \min \{\mu_1(\gamma_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1)), \mu_2(\gamma_2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_2)), \cdots, \mu_\ell(\gamma_\ell(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_\ell))\}$$

例えば、ブロックノルムおよび非対称直角距離を用いた FMMP が、それぞれ [5] および [7] において扱われている。各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mu_{\text{FMMP}}(\boldsymbol{x})$ の値は施設の位置 $\boldsymbol{x}$ に対する総合満足度（すべての需要点に関する満足度）を表すと解釈される。μ_{FMMP} をメンバーシップ関数としてもつ $\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合は $\cap_{i \in I} \overline{A}_i$ と表され、それはファジィ集合 $\overline{A}_i, i \in I$ の通常の共通部分を表し、すべての需要点に関する施設の望ましい位置を表すと解釈されるファジィ集合である。よって、FMMP は総合満足度を最大にするような施設の位置を求める問題と解釈される。**ファジィ max-T 型配置問題 (fuzzy max-T location problem, FMTP)** は FMMP の一般化であり、次のように定式化される。

(4) $$\max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \mu_{\text{FMTP}}(\boldsymbol{x}) \equiv T\,(\mu_1(\gamma_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1)), \mu_2(\gamma_2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_2)), \cdots, \mu_\ell(\gamma_\ell(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_\ell)))$$

ここで、T: $[0,1]^\ell \to [0,1]$ は $[0,1]$ 上の二項演算である三角型ノルム の ℓ 項演算への拡張（正確な定義は 2 節において与える）であり、FMMP において用いられている minimum 演算を一般化したものである。各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mu_{\text{FMTP}}(\boldsymbol{x})$ の値は施設の位置 $\boldsymbol{x}$ に対する T を演算として用いたときの総合満足度を表すと解釈される。μ_{FMTP} をメンバーシップ関数としてもつ $\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合は $(\cap_T)_{i \in I} \overline{A}_i$ と表され、それはファジィ集合 $\overline{A}_i, i \in I$ の T を用いたときの共通部分を表し、すべての需要点に関する T を用いたときの施設の望ましい位置を表すと解釈されるファジィ集合である。よって、FMTP は T を用いたときの総合満足度を最大にするような施設の位置を求める問題と解釈される。FMMP および FMTP のすべての最適解の集合をそれぞれ S^*_{FMMP} および S^*_{FMTP} とする。

[8, 9] において、$\mu_i, i \in I$ を $\mathbb{R}^n$ から $[0,1]$ への関数とし、(2), (3) および (4) において $\mu_i(\gamma_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i)), i \in I$ を $\mu_i(\boldsymbol{x}), i \in I$ で置き換えたファジィ多目的, maximin 型および max-T 型問題が扱われている。

本稿では、ファジィ max-T 型配置問題を主に扱う。そして、ファジィ max-T 型配置問題の最適解が存在するための条件およびファジィ max-T 型配置問題の最適解とファジィ多目的配置問題の有効解の間の関係を与える。さらに、ファジィ max-T 型配置問題の最適解を求めるための手続きを与える。

2. 三角型ノルム 本節では、FMTP に用いるとよいと思われるいくつかの三角型ノルムについて述べる。三角型ノルムに関する詳細は [4] 参照。

定義 三角型ノルム (triangular norm)（または単に **t-ノルム (t-norm)**）は $[0,1]$ 上の二項演算 T、すなわち、関数 $T:[0,1]^2 \to [0,1]$ で任意の $x,y,z \in [0,1]$ に対して次の 4 つの条件 (T1) $T(x,y)=T(y,x)$ (可換性), (T2) $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$ (結合性), (T3) $T(x,y) \le T(x,z)$ whenever $y \le z$, (単調性) および (T4) $T(x,1)=x$ (境界条件) をみたすものをいう。

例 1 （t-ノルムの例） $x,y \in [0,1]$ とする。

(i)
$$T_{\mathrm{M}}(x,y) \equiv \min\{x,y\} \qquad \textbf{(minimum)}$$

(ii)
$$T_{\mathrm{D}}(x,y) \equiv \begin{cases} \min\{x,y\} & \text{if } \max\{x,y\}=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \textbf{(drastic product)}$$

(iii) $\lambda \in (0,1) \equiv \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ とする。

$$T^{(\lambda)}(x,y) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } x \in (0,\lambda), y \in (0,1) \text{ or } x \in (0,1), y \in (0,\lambda) \\ \min\{x,y\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

(iv) $m \in \mathbb{N}$ とする。ここで、$\mathbb{N}$ はすべての自然数の集合である。

$$T_{\mathrm{M}}^{[m]}(x,y) \equiv \begin{cases} \min\left(\frac{\lfloor mx \rfloor}{m}, \frac{\lfloor my \rfloor}{m}\right) & \text{if } x,y \in [0,1) \\ \min\{x,y\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで、$x \in \mathbb{R}$ に対して $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表し、$[0,1) \equiv \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x < 1\}$ である。また、$T_{\mathrm{M}}^{[1]} = T_{\mathrm{D}}$ となる。

任意の t-ノルム T は、すべての $x,y \in [0,1]$ に対して $T_{\mathrm{D}}(x,y) \le T(x,y) \le T_{\mathrm{M}}(x,y)$ となることが容易にわかる。minimum と drastic prodcut は基本的な t-ノルムであり、$T^{(\lambda)}, \lambda \in (0,1)$ および $T_{\mathrm{M}}^{[m]}, m \in \mathbb{N}$ はそれぞれ [4] の Proposition 3.63 および 7.30 を用いて構成された t-ノルムである。例 1 において、T_{M} は連続になり、それ以外の t-ノルムは不連続であるが上半連続になる。

定義における可換性 (T1) と結合性 (T2) より、t-ノルム T は ℓ 項演算に拡張できる。すなわち、$x_i \in [0,1]$, $i=1,2,\cdots,k+2$ に対して

$$T^{k+1}(x_1,x_2,\cdots,x_{k+2}) \equiv T(T^k(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_{k+2})$$

とする。ここで、$T^1(x_1,x_2) \equiv T(x_1,x_2)$ である。このとき、$T^{\ell-1}$ の添字 $\ell-1$ は省略して T と書くことにする。

例 2 (t-ノルムの ℓ 項演算への拡張の例)　$x_1, x_2, \cdots, x_\ell \in [0,1]$ とする。

(i)
$$T_{\mathrm{M}}(x_1, x_2, \cdots, x_\ell) = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_\ell\}$$

(ii)
$$T_{\mathrm{D}}(x_1, x_2, \cdots, x_\ell) = \begin{cases} x_i & \text{if } x_j = 1, \forall j \neq i \text{ for some } i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(iii) $\lambda \in (0,1)$ とする。

$$T^{(\lambda)}(x_1, x_2, \cdots, x_\ell) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_i \in (0,\lambda), x_j \in (0,1) \text{ for some } i,j \text{ with } i \neq j \\ \min\{x_1, x_2, \cdots, x_\ell\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

(iv) $m \in \mathbb{N}, H \equiv \{i \in I : x_i < 1\}$ とする。

$$T_{\mathrm{M}}^{[m]}(x_1, x_2, \cdots, x_\ell) = \begin{cases} \min\left\{\frac{\lfloor m x_1 \rfloor}{m}, \frac{\lfloor m x_2 \rfloor}{m}, \cdots, \frac{\lfloor m x_\ell \rfloor}{m}\right\} & \text{if } |H| \geq 2 \\ x_i & \text{if } x_j = 1, \forall j \neq i \text{ for some } i \end{cases}$$

ここで、$|H|$ は集合 H の基数である。

T_{M} を用いた FMTP は FMMP となることに注意。T を t-ノルムとし、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $x_i = \mu_i(\gamma_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i)), i \in I$ と置くと、$T(x_1, x_2, \cdots, x_\ell)$ の値は施設の位置 $\boldsymbol{x}$ に対する総合満足度を表す。例 2 (iv) における H に対して、$|H| \leq 1$ はある $\boldsymbol{d}_i, i \in I$ 以外すべての需要点の満足度が 1 であることを意味する。$T = T_{\mathrm{M}}$ ならば総合満足度は各需要点の満足度の最小値であり、$T = T_{\mathrm{D}}$ ならば $|H| \leq 1$ のとき総合満足度は各需要点の満足度の最小値であり、そうでなければ 0 であり、$T = T^{(\lambda)}, \lambda \in (0,1)$ ならばすべての需要点の満足度が λ 以上のときまたは $|H| \leq 1$ のとき総合満足度は各需要点の満足度の最小値であり、そうでなければ 0 であり、$T = T_{\mathrm{M}}^{[m]}, m \in \mathbb{N}$ ならば $|H| \leq 1$ のとき総合満足度は各需要点の満足度の最小値であり、そうでなければ各需要点の満足度の最小値が属しているある区間 $\left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right), k \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$ の下限値 $\frac{k}{m}$ である。

3. FMTP の最適解の存在性　本節では、S^*_{FMTP} が空にならないための条件および S^*_{FMTP} と F_{E} の間の関係を与える。

μ を $\mathbb{R}^n$ から $[0,1]$ への関数とする。各 $\alpha \in (0,1] \equiv \{x \in \mathbb{R}\text{: } 0 < x \leq 1\}$ に対して、μ の上方レベル集合 $[\mu]_\alpha \equiv \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mu(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$ を μ の **α-カット (α-cut)** とよぶ。任意の $\alpha \in (0,1]$ に対して μ の α-カットが有界であるとき μ をメンバーシップ関数としてもつファジィ集合は**有界 (bounded)** であるという。

次の定理は、FMTP の最適解が存在するための十分条件および FMTP の最適解と FMCP の有効解の間の関係を与える。

定理　すべての $\mu_i, i \in I$ が上半連続であり、ある $j \in I$ に対して A_j が有界であり、T

が上半連続 t-ノルムならば $S^*_{\text{FMTP}} \neq \emptyset$ となる。さらに、$\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \mu_{\text{FMTP}}(\boldsymbol{x}) > 0$ ならば、$S^*_{\text{FMTP}} \cap F_{\text{E}} \neq \emptyset$ となる。

次の系は、FMMP の最適解が存在するための十分条件および FMMP の最適解と FMCP の有効解の間の関係を与える。

系 すべての $\mu_i, i \in I$ が上半連続であり、ある $j \in I$ に対して A_j が有界であるならば $S^*_{\text{FMMP}} \neq \emptyset$ となる。さらに、$\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \mu_{\text{FMMP}}(\boldsymbol{x}) > 0$ ならば、$S^*_{\text{FMMP}} \cap F_{\text{E}} \neq \emptyset$ となる。

4. FMTP の最適解を求める手続き 本節では、FMTP の最適解を求めるための手続きを与える。

以下では、FMTP の最適解が存在すると仮定する。FMTP の最適値を α^* とすると $\alpha^* = \max\{\alpha \in [0,1] : [\mu_{\text{FMTP}}]_\alpha \neq \emptyset\}$ となる。このとき、任意の $\alpha > \alpha^*$ に対して $[\mu_{\text{FMTP}}]_\alpha = \emptyset$ となり、任意の $\alpha \leq \alpha^*$ に対して $[\mu_{\text{FMTP}}]_\alpha \neq \emptyset$ となり、FMTP のすべての最適解の集合は $[\mu_{\text{FMTP}}]_{\alpha^*}$ となる。ここで、$[\mu_{\text{FMTP}}]_0 \equiv \mathbb{R}^n$ とする。よって、$\varepsilon \in (0,1]$ が与えられたとき、次の 2 分探索法は FMTP の ε-最適解を求める。

2 分探索法

ステップ 0 $[\mu_{\text{FMTP}}]_1 \neq \emptyset$ ならば終了。$[\mu_{\text{FMTP}}]_1$ が FMTP の最適解の集合である。そうでなければ $[\alpha_{\text{L}}, \alpha_{\text{U}}] := [0,1]$ とし、ステップ 1 へ。

ステップ 1 $\alpha_{\text{U}} - \alpha_{\text{L}} < \varepsilon$ ならば終了。$[\mu_{\text{FMTP}}]_{\alpha_{\text{L}}}$ が FMTP の最適解の集合であり、α_{L} が最適値である。そうでなければステップ 2 へ。

ステップ 2 $\alpha := \frac{\alpha_{\text{L}}+\alpha_{\text{U}}}{2}$ とする。$[\mu_{\text{FMTP}}]_\alpha \neq \emptyset$ ならば $\alpha_{\text{L}} := \alpha$ とし、そうでなければ $\alpha_{\text{U}} := \alpha$ とする。ステップ 1 へ。

2 分探索法の反復回数は $\lfloor \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ である。2 分探索法のステップ 0 およびステップ 1 において $\alpha \in (0,1]$ に対して $[\mu_{\text{FMTP}}]_\alpha$ が空になるかどうかを調べる必要がある。一般に、t-ノルム T と $\mu_i, \gamma_i, i \in I$ に依って、$[\mu_{\text{FMTP}}]_\alpha$ が空になるかどうかを調べることは容易であるとは限らないと予想されるが、次の関係を用いると便利である。

$$[\mu_{\text{FMTP}}]_\alpha = \boldsymbol{\gamma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}^{-1}([T]_\alpha))$$

ここで、$\boldsymbol{\mu}^{-1}([T]_\alpha)$ は $\boldsymbol{\mu}$ の下での $[T]_\alpha$ の逆像を表し、$\boldsymbol{\gamma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}^{-1}([T]_\alpha))$ は $\boldsymbol{\gamma}$ の下での $\boldsymbol{\mu}^{-1}([T]_\alpha)$ の逆像を表す。

例 3 $\alpha \in (0,1]$ とする。

(i)
$$[T_{\text{M}}]_\alpha = [\alpha, 1]^\ell$$

(ii)
$$[T_{\text{D}}]_\alpha = \cup_{i\in I}\{1\}^{i-1} \times [\alpha, 1] \times \{1\}^{\ell-i}$$

(iii) $\lambda \in (0,1)$ とする。

$$[T^{(\lambda)}]_\alpha = \begin{cases} [\alpha, 1]^\ell & \text{if } \alpha \in [\lambda, 1] \\ [\lambda, 1]^\ell \cup \left(\cup_{i\in I}\{1\}^{i-1} \times [\alpha, 1] \times \{1\}^{\ell-i}\right) & \text{if } \alpha \in (0, \lambda) \end{cases}$$

(iv) $m \in \mathbb{N}, K \equiv \left\{\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \cdots, \frac{m-1}{m}, 1\right\}$ とする。

$$[T_{\mathrm{M}}^{[m]}]_\alpha = \begin{cases} [\alpha, 1]^\ell & \text{if } \alpha \in K \\ \left[\frac{\lfloor m\alpha \rfloor + 1}{m}, 1\right]^\ell \cup \left(\cup_{i \in I}\{1\}^{i-1} \times [\alpha, 1] \times \{1\}^{\ell - i}\right) & \text{if } \alpha \in (0, 1] \setminus K \end{cases}$$

数値例　$\mathbb{R}^2$ において $\ell = 4$ $(I = \{1, 2, 3, 4\})$ とし、$\boldsymbol{d}_1 = (1, 5)^T, \boldsymbol{d}_2 = (3, 3)^T, \boldsymbol{d}_3 = (5, 0)^T, \boldsymbol{d}_4 = (0, 1)^T$ とし、$\gamma_i, i \in I$ の単位円 $B_i, i \in I$ を

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, |y| \leq 1\} \\ B_2 &= \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x - |y| \geq -1, x \leq 1\} \\ B_3 &= \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : |x| + 2y \leq 2, |x| - y \leq 2\} \\ B_4 &= \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \geq -1, |y| \leq 1, x + |y| \leq 1\} \end{aligned}$$

とする（図１）。また、$(a_1, b_1, c_1) = (1, 2, 4)$, $(a_2, b_2, c_2) = (2, 3, 6)$, $(a_3, b_3, c_3) = (1, 3, 5)$, $(a_4, b_4, c_4) = (2, 4, 8)$ とし、各 $i \in I$ に対して

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in x < 0 \text{ or } x > c_i \\ \frac{x}{a_i} & \text{if } x \in [0, a_i) \\ 1 & \text{if } x \in [a_i, b_i] \\ \frac{c_i - x}{c_i - b_i} & \text{if } x \in (b_i, c_i] \end{cases}$$

とする（図２）。このとき、$T_{\mathrm{M}}, T_{\mathrm{D}}, T^{(0.3)}$ および $T_{\mathrm{M}}^{[4]}$ それぞれを用いた場合の次の FMTP を考える。

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2} T\left(\mu_1(\gamma_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1)), \mu_2(\gamma_2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_2)), \mu_3(\gamma_3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_3)), \mu_4(\gamma_4(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_4))\right)$$

また、$\varepsilon = 0.01$ とし、FMTP に 2 分探索法を適用して得られる最適解の集合を S_T^* とし最適値を α_T^* とする。T_{M}, T_{D}, $T^{(0.3)}$ および $T_{\mathrm{M}}^{[4]}$ それぞれを用いた FMTP に 2 分探索法を適用すると何れも 7 回の反復の後に次を得る（図３）。

$$\alpha_{T_{\mathrm{M}}}^* = \alpha_{T^{(0.3)}}^* = 0.664063, \quad \alpha_{T_{\mathrm{D}}}^* = 0.328125, \quad \alpha_{T_{\mathrm{M}}^{[4]}}^* = 0.5$$

$$\begin{aligned} S_{T_{\mathrm{M}}}^* &= S_{T^{(0.3)}}^* = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2.32813, y \leq 0.5x + 1.17188, y \leq -x + 4.67188\} \\ S_{T_{\mathrm{D}}}^* &= \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1.65625, y \leq 0.5x + 0.5, y \leq -x + 4\} \\ S_{T_{\mathrm{M}}^{[4]}}^* &= \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2, y \leq 0.5x + 1.5, y \leq -x + 5\} \\ &\quad \cup \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2, x \geq 4, y \leq -x + 7\} \end{aligned}$$

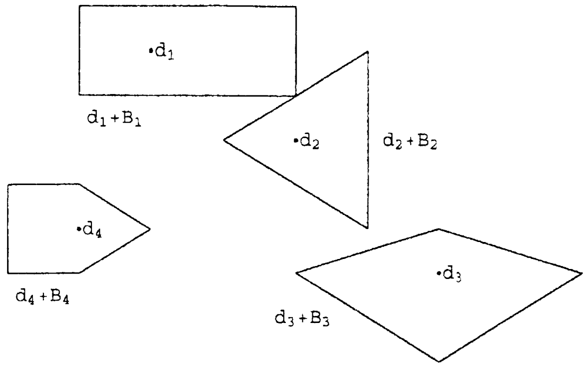

図 1　需要点と $B_i, i \in I$

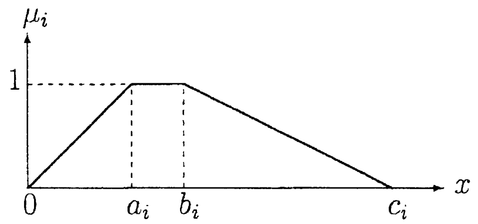

図 2　$\mu_i, i \in I$

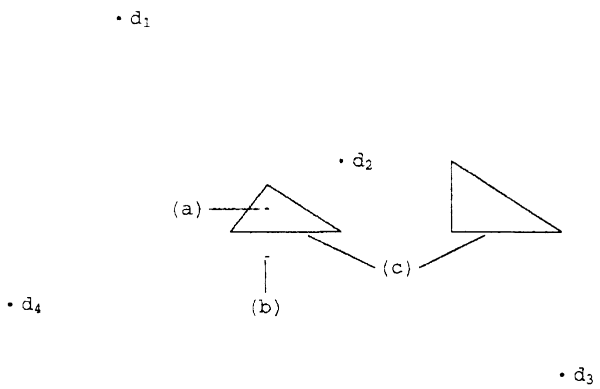

図 3　(a) $S^*_{T_{\mathrm{M}}} = S^*_{T^{(0.3)}}$; (b) $S^*_{T_{\mathrm{D}}}$; (c) $S^*_{T_{\mathrm{M}}^{[4]}}$

5. 結論　本稿では、ファジィ多目的, maximin 型およびファジィ max-T 型配置問題を考え、主に、ファジィ max-T 型配置問題を扱った。まず、ファジィ max-T および maximin 型配置問題の最適解が存在するための十分条件およびそれらの最適解とファジィ多目的配置問題の有効解の間の関係を与えた。次に、ファジィ max-T 型配置問題の最適解を求める 2 分探索法を用いた手続きを与えた。

参考文献

[1] M. Avriel, W. E. Diewert, S. Schaible and I. Zang, *Generalized concavity*, Plenum Press, N. Y., London, 1988.

[2] R. Bellman and L. Zadeh, *Decision making in fuzzy environment*, Manage. Sci., **17**, 1970, 141-164.

[3] J. -B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms I: Fundamentals*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[4] E. P. Klement, R. Mesiar and E. Pap, *Triangular norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 2000.

[5] M. Kon and S. Kushimoto, *On efficient solutions of multicriteria location problems with the block norm*, Scientiae Mathematicae, **2**, 1999, 245-254.

[6] M. Kon, *On fuzzy multicriteria location problems*, to appear in Proceedings of the Third International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis edited by W. Takahashi and T. Tanaka, Yokohama Publishers, Japan.

[7] T. Matsutomi and H. Ishii, *Fuzzy facility location problem with asymmetric rectilinear distance* (in Japanese), Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and Systems, **8**, 1996, 57-64.

[8] J. Ramík and M. Vlach, *Pareto-optimality of compromise decisions*, Fuzzy Sets and Systems, **129**, 2002, 119-127.

[9] J. Ramík and M. Vlach, *Generalized concavity in fuzzy optimization and decision analysis*, Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London, 2002.

[10] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970.